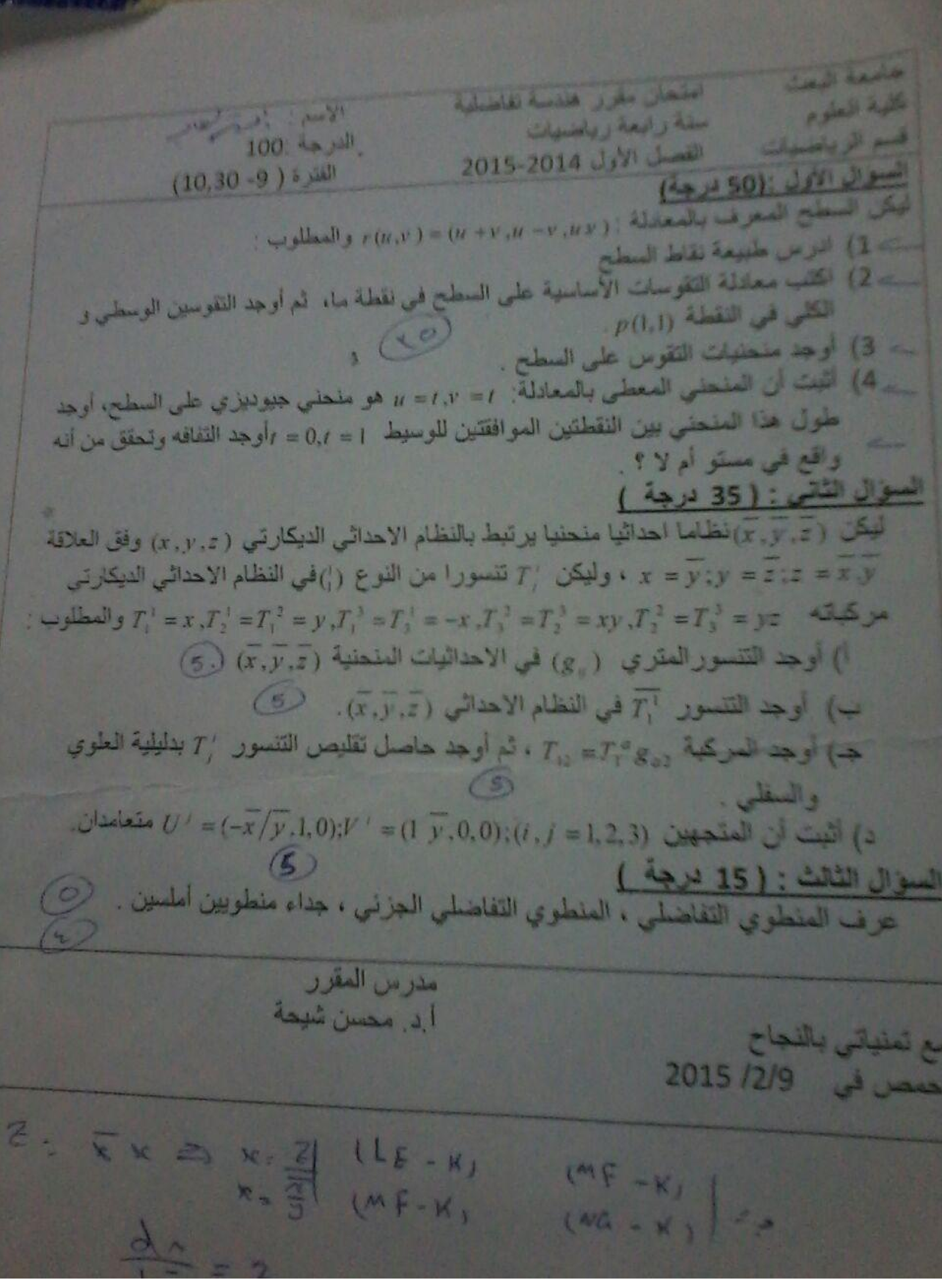


جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر هندسة تفاضلية
سنة رابعة رياضيات
الفصل الأول 2014-2015

الاسم :
الدرجة : 100
الفترة (9- 10,30)

السؤال الأول :(50 درجة)

ليكن السطح المعرف بالمعادلة : $r(u,v)=(u+v,u-v,uv)$ والمطلوب :

1) ادرس طبيعة نقاط السطح

2) اكتب معادلة التقوسات الأساسية على السطح في نقطة ما، ثم أوجد التقوسين الوسطي و الكلي في النقطة $p(1,1)$.

3) أوجد منحنيات التقوس على السطح .

4) اثبت أن المنحني المعطى بالمعادلة: $u=t,v=t$ هو منحني جيوديزي على السطح، أوجد طول هذا المنحني بين النقطتين الموافقتين للوسيط $t=0,t=1$ أوجد التفافه وتحقق من أنه واقع في مستوٍ أم لا ؟ .

السؤال الثاني : (35 درجة)

ليكن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ نظاما احداثيا منحنيا يرتبط بالنظام الاحداثي الديكارتي (x,y,z) وفق العلاقة $x=\bar{y};y=\bar{z};z=\bar{x}\,\bar{y}$ ، وليكن T_i^j تنسورا من النوع $\binom{1}{1}$ في النظام الاحداثي الديكارتي مركباته $T_1^1=x,T_2^1=T_1^2=y,T_1^3=T_3^1=-x,T_3^2=T_2^3=xy,T_2^2=T_3^3=yz$ والمطلوب :

أ) أوجد التنسور المتري (g_{ij}) في الاحداثيات المنحنية $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

ب) أوجد التنسور $\overline{T_1^1}$ في النظام الاحداثي $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

جـ) أوجد المركبة $T_{12}=T_1^{a}g_{a2}$ ، ثم أوجد حاصل تقليص التنسور T_i^j بدليلية العلوي والسفلي .

د) اثبت أن المتجهين $(i,j=1,2,3)$ $U^j=(-\bar{x}/\bar{y},1,0);V^j=(1\,\bar{y},0,0)$ متعامدان.

السؤال الثالث : (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي ، المنطوي التفاضلي الجزئي ، جداء منطويين أملسين .

مدرس المقرر
أ.د. محسن شيحة

مع تمنياتي بالنجاح
حمص في 2015/2/9

[illegible] الفصل الأول ٢٠١٤ - ٢٠١٥ (50) [illegible]

$r(u,v)=(u+v,\ u-v,\ uv)$

$r_u=(1,1,v),\ r_v=(1,-1,u),\ E=2+v^2,\ F=u\cdot v,\ G=2+u^2$ 10

$r_{uu}=(0,0,0),\ r_{uv}=(0,0,1),\ r_{vv}=(0,0,0)$

$\vec{n}=\dfrac{\vec{r_u}\times\vec{r_v}}{|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|}=\dfrac{(u+v,\ v-u,\ -2)}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}},\ L=N=0,\ M=\dfrac{-2}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}}$

$(u,v)=(1,1)\Rightarrow E=G=3,\ F=1,\ L=N=0,\ M=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

1) $LN-M^2=\dfrac{-A}{(2u^2+v^2+4)}<0$ 5 [illegible]

2) $K^2(EG-F^2)-K(EN-2FM+GL)+LN-M^2\neq0$ 5

$H=\dfrac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}=\dfrac{+2/\sqrt{2}}{2(8)}=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$ 5

$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{-1/\sqrt{2}}{8}=\dfrac{-1}{16}$ 5

3) $r(u(t),v(t))=(2t,0,t^2)\Rightarrow r'(t)=(2,0,2t),\ r''(t)\neq(0,0,2)$
$r'''=(0,0,0)$

$n(t)=\dfrac{(2t,0,-2)}{\sqrt{4t^2+4}},\ \Rightarrow K_g=(n,r',r'')=0\Rightarrow K_g=0$ 5

$L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G\ \text{[illegible]}}\,dt=2\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=$ [illegible] 5

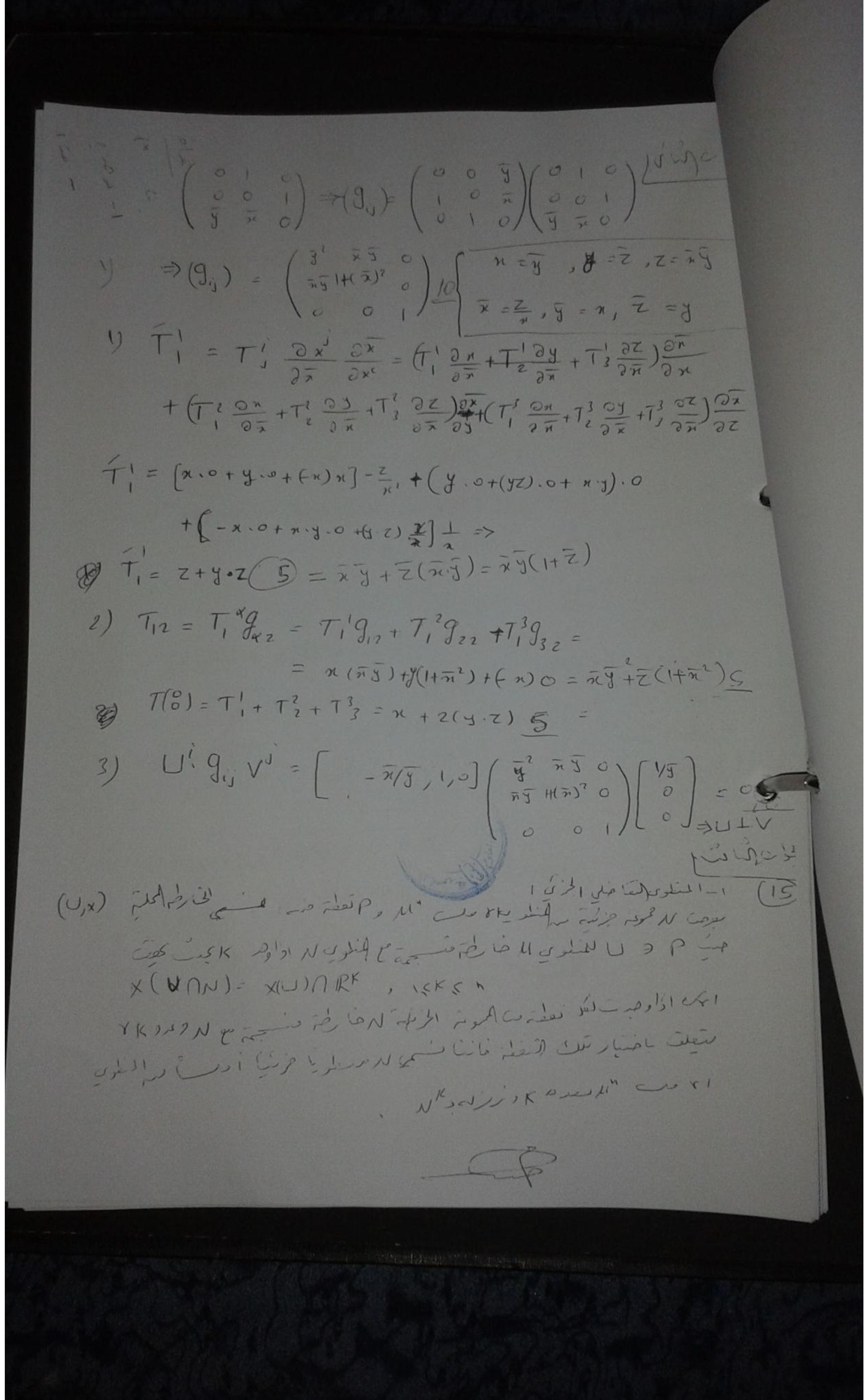
4) $K=\dfrac{|r'\times r''|}{|r'|^3}=\dfrac{4}{(4+4t^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ 5

$\tau=0\Rightarrow\dfrac{(r',r'',r''')}{|r'\times r''|^2}$ 5

$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2\\ 2+v^2 & u\cdot v & 2+u^2\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2u^2+2v^2+4}} & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2+u^2)dv^2-(2+v^2)du^2=0\Rightarrow\dfrac{dv}{\sqrt{2+v^2}}=\mp\dfrac{du}{\sqrt{2+u^2}}$

$\Rightarrow\sinh^{-1}\left(\frac{v}{2}\right)=\sinh^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$ [illegible] 5

$\Rightarrow u=\pm v$ [illegible]



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{y} \\ 1 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \bar{y}^2 & \bar{x}\bar{y} & 0 \\ \bar{x}\bar{y} & 1+(\bar{x})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 10$$

$x = \bar{y}$, $y = \bar{z}$, $z = \bar{x}\bar{y}$

$\bar{x} = \frac{z}{x}$, $\bar{y} = x$, $\bar{z} = y$

1) $\bar{T}^1_1 = T^i_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} = \left(T^1_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T^1_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T^1_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$

$+ \left(T^2_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T^2_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T^2_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \left(T^3_1 \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + T^3_2 \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + T^3_3 \frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}$

$\bar{T}^1_1 = [x \cdot 0 + y \cdot 0 + (-x)x] - \frac{z}{x^2} + (y \cdot 0 + (yz) \cdot 0 + x \cdot y) \cdot 0$

$+ [-x \cdot 0 + x \cdot y \cdot 0 + (y \cdot z) x] \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\bar{T}^1_1 = z + y \cdot z$ (5) $= \bar{x}\bar{y} + \bar{z}(\bar{x}\bar{y}) = \bar{x}\bar{y}(1+\bar{z})$

2) $T_{12} = T^\alpha_1 g_{\alpha 2} = T^1_1 g_{12} + T^2_1 g_{22} + T^3_1 g_{32} =$

$= x(\bar{x}\bar{y}) + y(1+\bar{x}^2) + (-x)0 = \bar{x}\bar{y}^2 + \bar{z}(1+\bar{x}^2)$ 5

$T\binom{0}{0} = T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = x + 2(y \cdot z)$ 5

3) $U^i g_{ij} V^j = [\,-\bar{x}/\bar{y}, 1, 0\,] \begin{pmatrix} \bar{y}^2 & \bar{x}\bar{y} & 0 \\ \bar{x}\bar{y} & 1+(\bar{x})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/\bar{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow U \perp V$

السؤال الثالث

(15) ١- المنطوي التفاضلي الجزئي: لتكن M منطوي بعد n و P نقطة من M تسمى الخريطة المحلية (U,x)

نسمي N مجموعة جزئية من المنطوي M

حيث P ∈ U للمنطوي M خارطة منسجمة مع المنطوي N اذا وجد K بحيث

$x(U \cap N) = x(U) \cap \mathbb{R}^K \quad , \quad 1 \le K \le n$

اي اذا وجدت لكل نقطة من المجموعة الجزئية N خارطة منسجمة مع N ...

تتعلق باختيار تلك النقطة فاننا نسمي N منطويا جزئيا او ببساطة من المنطوي

M من البعد K ونرمز له بـ N^K.

فضاء تفاضلي:

ليكن M^n فضاء طبولوجي موصول ويحقق ما يلي:

1- نوجد في M^n مجموعة من الخرائط $A=\{(U_\alpha, X_\alpha), \alpha\in I\}$ بحيث (تسمى الأطلس على M^n) بحيث:

- من أجل أي $\alpha\in I$ فإن المجموعة $X_\alpha(U_\alpha)$ مفتوحة في $\mathbb{R}^n$.
- $M^n=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$

2- من أجل أي خارطتين (U,X) ، (V,Y) من الأطلس A $(U\cap V\neq\phi)$ يكون التطبيق

$$Y\circ X^{-1}: X(U\cap V)\longrightarrow Y(U\cap V)$$

$$(x^1,\dots,x^n)\longrightarrow(y^1(x^1,\dots,x^n),\dots,y^n(x^1,\dots,x^n))$$

3- الأطلس A أعظمي على M^n (من أجل أي خارطة (W,Z) على M^n منسجمة مع A يجب أن تنتمي إلى A.

جداء منطويين أملسين:

ليكن M^n ، N^k منطويين أملسين و $A(M^n)$ ، $\bar{A}(N^k)$ على الترتيب، ولنعرف على $M^n\times N^k$ بنية تفاضلية على النحو:

بفرض أن (U,X) خارطة ما من الأطلس A و (V,Y) خارطة من الأطلس $\bar{A}$ ، عندئذ فإن الأطلس $\bar{A}(M^n\times N^k)$ للجداء $M^n\times N^k$ يتكون من الخرائط (W,Z) حيث $W=U\times V$ والتطبيق:

معرف بـ:

$$Z=X\times Y: U\times V\longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

$$Z(p,q)=(X\times Y)(p,q)=(X(p),Y(q))$$

انتهت الأ[illegible]